



微信号：jiaoshi688

## 教师招聘考试初中数学习题（一）答案

### 一、选择题（本题有 6 小题）

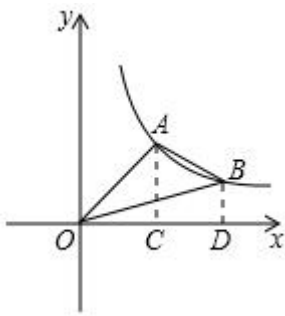
1. 【答案】D. 中公讲师解析：∵⊙O 的直径 CD 过弦 EF 的中点 G，

∴  $\widehat{ED} = \widehat{DF}$ （垂径定理），

∴  $\angle DCF = \frac{1}{2} \angle EOD$ （等弧所对的圆周角是圆心角的一半），

∴  $\angle DCF = 20^\circ$  .

2. 【答案】B. 中公讲师解析：过 A、B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 C、D，如图，



∵ 双曲线  $y = \frac{k}{x}$  经过点 A (2, 2)，

∴  $k = 2 \times 2 = 4$ ，

而点 B (4, m) 在  $y = \frac{4}{x}$  上，

∴  $4 \cdot m = 4$ ，解得  $m = 1$ ，

即 B 点坐标为 (4, 1)，

∴  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\text{梯形 } ABDC} - S_{\triangle BOD}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} OC \cdot AC + \frac{1}{2} \times (AC+BD) \times CD - \frac{1}{2} \times OD \times BD \\
&= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (2+1) \times (4-2) - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 \\
&= 3.
\end{aligned}$$

3. 【答案】A. 中公讲师解析：∵猫沿着母线 PA 下去抓老鼠，猫到达点 A 时，

∴s 随着 t 的增大而增大，

∵老鼠沿着底面圆周逃跑，猫在后面沿着相同的路线追时，

∴s 随着 t 的增大不发生变化，

∵在圆周的点 B 处抓到了老鼠后沿母线 BP 回到顶点 P 处时，

∴s 随着 t 的增大而减小.

4. 【答案】C. 中公讲师解析：①∵BC⊥AB 于点 B，

∴∠CBD+∠ABD=90°，

∵∠BAD+∠ABD=90°

∴∠CBD=∠BAD，

∵∠BAD=∠CEB，

∴∠CEB=∠CBD，

故①正确.

②∵∠C=∠C，∠CEB=∠CBD，

∴△EBC∽△BDC，

$$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{BC},$$

故②正确.

③∵∠EBD=∠BDF=90°，

∴DF∥BE，

假设点 F 是 BC 的中点，则点 D 是 EC 的中点，

∴ED=DC，

∵ED 是直径，长度不变，而 DC 的长度是不定的，

∴DC 不一定等于 ED，

故③是错误的.

$$④ \because \frac{BC}{AB} = \frac{3}{2},$$

设 BC=3x，AB=2x，

∴OB=OD=x，

∴在 RT△CBO 中，OC=√10 x，

∴CD=(√10-1)x，

$$\begin{aligned} \because \text{由 (2) 知, } \frac{BD}{BE} &= \frac{CD}{CB}, \\ \therefore \frac{BD}{BE} &= \frac{CD}{BC} = \frac{(\sqrt{10}-1)x}{3x} = \frac{\sqrt{10}-1}{3}, \\ \therefore \tan E &= \frac{BD}{BE} \\ \therefore \tan E &= \frac{\sqrt{10}-1}{3}, \end{aligned}$$

故④正确.

5. 【答案】D. 中公讲师解析:  $\because A_1B_1 = \sqrt{2^2 - 1^2}$ ,  $A_2B_2 = \sqrt{3^2 - 2^2}$ ,  $\dots$ ,  $A_nB_n = \sqrt{(n+1)^2 - n^2}$ ,

$$\therefore S_{\triangle A_n B_n O} = \frac{OB_n \cdot A_n B_n}{2} = \frac{n \cdot \sqrt{(n+1)^2 - n^2}}{2} = \frac{n}{2} \sqrt{2n+1}.$$

6. 【答案】D. 中公讲师解析: 设抛物线的解析式为  $y = a(x+3)^2 - 6$ , 将  $(-1, -4)$  代入得:

$$a(-1+3)^2 - 6 = -4,$$

$$a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 6 = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2}.$$

A:  $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-\frac{3}{2}) > 0$ , 所以  $b^2 > 4ac$ , 故选项 A 正确;

$$B: \frac{1}{2}(x+3)^2 - 6 = -4,$$

$x_1 = -5$ ,  $x_2 = -1$ , 所以  $\frac{1}{2}(x+3)^2 - 6 = -4$  的两根为 -5 和 -1, 故选项 B 正确;

C: 抛物线顶点坐标为  $(-3, -6)$ , 即当  $x = -3$  时,  $y$  有最小值为 -6,

所以  $ax^2 + bx + c \geq -6$ , 故选项 C 正确;

D: 抛物线是轴对称图形, 对称轴是  $x = -3$ , 且  $a = \frac{1}{2} > 0$ ,  $y$  有最小值为 -6,

$$|-3 - (-2)| = 1, |-5 - (-3)| = 2,$$

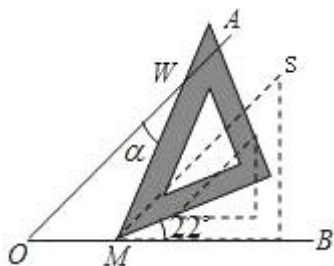
所以若点  $(-2, m)$ ,  $(-5, n)$  在抛物线上, 则  $m < n$ ,

故选项 D 错误.

## 二、填空题 (本题共 6 小题)

7. 【答案】 $22^\circ$ . 中公讲师解析: 由平移的性质知,  $AO \parallel SM$ ,

故  $\angle WMS = \angle OWM = 22^\circ$ .



8. 【答案】  $\frac{3}{4}$  . 中公讲师解析：点 P (2, 1) 向上平移 3 个单位或者向左平移 4 个单位

的坐标为 (2, 4) 或 (-2, 1) , 把 (2, 4) 和 (-2, 1) 代入  $y=kx+b$ , 可得: 
$$\begin{cases} 2k+b=4 \\ -2k+b=1 \end{cases}$$

解得: 
$$\begin{cases} k=\frac{3}{4} \\ b=\frac{5}{2} \end{cases}.$$

9. 【答案】  $4\sqrt{5}$  或  $2\sqrt{30}$  . 中公讲师解析：当点  $C'$  在边 AC 上时 (如图 1) ,

$$\because AC=10, AC' =2,$$

$$\therefore CC' =AC-AC' =8,$$

由轴对称性可知  $\angle BC' C = \angle C$ ,

$$\therefore \angle BC' C = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BC' C,$$

$$\therefore \frac{BC}{CC'} = \frac{AC}{BC},$$

$$\text{即 } BC^2 = CC' \times AC = 8 \times 10 = 80,$$

$$\text{解得 } BC = 4\sqrt{5},$$

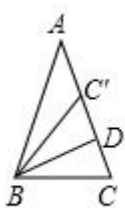


图 (1)

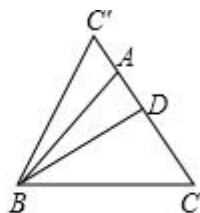


图 (2)

当点  $C'$  在边 AC 外时 (如图 2) ,

$$\because AC=10, AC' =2,$$

$$\therefore CC' =AC+AC' =12,$$

由轴对称性可知  $\angle BC' C = \angle C$ ,

$$\therefore \angle BC' C = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle BC' C,$$

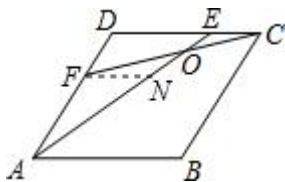
$$\therefore \frac{BC}{CC'} = \frac{AC}{BC},$$

$$\text{即 } BC^2 = CC' \times AC = 12 \times 10 = 120,$$

$$\text{解得 } BC = 2\sqrt{30}.$$

$$\text{故答案为: } 4\sqrt{5} \text{ 或 } 2\sqrt{30}.$$

10. 【答案】 $\frac{1}{6}$ . 中公讲师解析: 过点 F 作  $FN \parallel DC$  交 AE 于点 N,



$$\because FN \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle AFN \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{FN}{DE},$$

$$\because CE = DF, DE = 2CE, \text{ 四边形 } ABCD \text{ 是菱形},$$

$$\therefore AF = DE, AF = 2DF,$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{FN}{DE},$$

$$\text{设 } EC = x, \text{ 则 } DE = 2x, AF = 2x, DF = x,$$

$$\text{故 } \frac{2}{3} = \frac{FN}{DE} = \frac{FN}{2x},$$

$$\text{解得: } FN = \frac{4x}{3},$$

$$\therefore \frac{FN}{EC} = \frac{\frac{4x}{3}}{x} = \frac{4}{3},$$

$$\because FN \parallel EC,$$

$$\therefore \triangle FNO \sim \triangle CEO,$$

$$\therefore \frac{FN}{EC} = \frac{NO}{EO} = \frac{4}{3},$$

$$\text{设 } NO = 4a, \text{ 则 } EO = 3a,$$

$$\therefore \frac{AN}{NE} = \frac{2}{1} = \frac{AN}{7a},$$

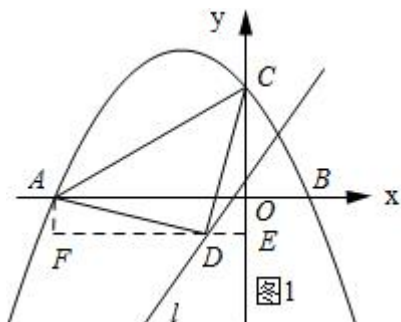
$$\therefore AN = 14a,$$

$$\text{故 } AO = 14a + 4a = 18a,$$

$$\therefore \frac{EO}{AO} = \frac{3a}{18a} = \frac{1}{6}.$$

11. 【答案】(1)  $2\sqrt{3}-3$ ; (2)  $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \sqrt{3}$ .

中公讲师解析：如图 1 所示：过点 D 作  $DE \perp y$  轴，垂足为 E，过点 A 作  $AF \perp DE$ ，垂足为 F.



$$\because \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADF + \angle CDE = 90^\circ.$$

$$\because \angle ADF + \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle CDE.$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle AFD \text{ 和 Rt}\triangle DEC \text{ 中} \begin{cases} \angle DAF = \angle CDE \\ \angle AFD = \angle DEC \\ AD = DC \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle DEC.$$

$$\therefore AF = DE, DF = CE.$$

$$\text{设点 D 的坐标为 } (x, \sqrt{3}x+m), \text{ 则 } x = \sqrt{3}x+m \text{ ①, } x+3 = \sqrt{3} - \sqrt{3}x-m \text{ ②}.$$

$$\text{①}+\text{②} \text{ 得: } 2x+3 = \sqrt{3},$$

$$\text{解得: } x = \frac{\sqrt{3}-3}{2}.$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-3}{2} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}-3}{2} + m.$$

$$\text{解得: } m = 2\sqrt{3}-3.$$

$$(2) \because OA=3, \angle CAB=30^\circ,$$

$$\therefore OC = \sqrt{3}.$$

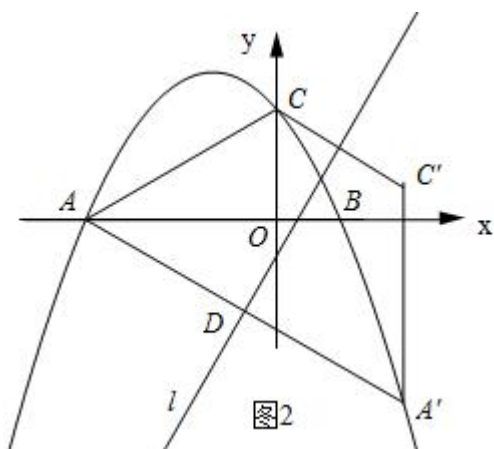
$$\therefore C(0, \sqrt{3}).$$

①当直线 l 经过点 C 时.

$$\because \text{将 } C(0, \sqrt{3}) \text{ 代入 } y = \sqrt{3}x+m \text{ 得:}$$

$$\therefore m = \sqrt{3}.$$

②如图 2 所示：



设抛物线的解析式为  $y = a(x+3)(x-1)$ .

$$\because \text{将 } C(0, \sqrt{3}) \text{ 代入得: } -3a = \sqrt{3}, \text{ 解得: } a = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$

$\because$  点 A 与点  $A'$  关于  $l$  对称,

$$\therefore AA' \perp l.$$

$$\therefore \text{直线 } AA' \text{ 的一次项系数为 } -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{设直线 } AA' \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

$$\because \text{将 } A(-3, 0) \text{ 代入得: } \sqrt{3} + b = 0, \text{ 解得: } b = -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{直线 } AA' \text{ 的解析式为 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}.$$

$$\text{将 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \text{ 代入 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3} \text{ 得: } -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$

$$\text{整理得: } x^2 + x - 6 = 0.$$

$$\text{解得: } x_1 = 2, x_2 = -3.$$

$$\because \text{将 } x = 2 \text{ 代入 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} \text{ 得: } y = -\frac{5\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } A' \text{ 的坐标为 } (2, -\frac{5\sqrt{3}}{3}).$$

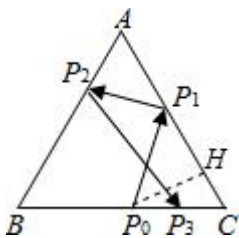
$$\therefore D(-\frac{1}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{6}).$$

$$\text{将 } D(-\frac{1}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{6}) \text{ 代入 } y = \sqrt{3}x + m \text{ 得: } -\frac{\sqrt{3}}{2} + m = -\frac{5\sqrt{3}}{6}, \text{ 解得: } m = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\therefore m \text{ 的取值范围是 } -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq m \leq \sqrt{3}.$$

12. 【答案】 (1)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ; (2)  $\frac{5}{6}$ .

中公讲师解析： (1) 过  $P_0$  作  $P_0H \perp AC$  于  $H$ ,



$\because$  反射角等于入射角,

$$\therefore \angle P_0P_1C = \angle P_2P_1A = \angle P_2P_3B,$$

又  $\because \angle C = \angle A = \angle B = 60^\circ$ ,

$$\therefore \triangle P_0P_1C \sim \triangle P_2P_3B,$$

$$\therefore \angle CP_1P_0 = \angle P_2P_3B = 45^\circ,$$

$$\therefore P_0H = P_1H,$$

$\because P_0$  是  $BC$  边的中点,

$$\therefore CP_0 = 1,$$

$$\therefore CH = \frac{1}{2}, P_0H = P_1H = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore CP_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2};$$

故答案为:  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ;

(2)  $\because$  反射角等于入射角,

$$\therefore \angle P_0P_1C = \angle P_2P_1A = \angle P_2P_3B,$$

又  $\because \angle C = \angle A = \angle B = 60^\circ$ ,

$$\therefore \triangle P_0P_1C \sim \triangle P_2P_1A \sim \triangle P_2P_3B,$$

$$\therefore \frac{P_0C}{P_1C} = \frac{P_2A}{P_1A} = \frac{P_2B}{P_3B},$$

设  $P_1C = x$ ,  $P_2A = y$ , 则  $P_1A = 2 - x$ ,  $P_2B = 2 - y$ .

$$\therefore \frac{1}{x} = \frac{y}{2-x} = \frac{2-y}{P_3B},$$

$$\therefore \begin{cases} xy = 2 - y \\ 2x - xy = P_3B \end{cases},$$

$$\therefore x = \frac{1}{3} (2 + P_3B),$$

$$\text{又} \because BP_3 = \frac{1}{2},$$



$$\therefore x = \frac{5}{6},$$

即  $P_1C$  的长是  $\frac{5}{6}$ .

### 三、解答题（本题有 5 小题）

13. 【答案】化简结果为  $\frac{x}{2}$ ，值为 -1.

中公讲师解析：

$$\left(\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1}\right) \div \frac{4}{x^2+x} = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right) \div \frac{4}{x(x+1)} = \frac{2}{x+1} \cdot \frac{x(x+1)}{4} = \frac{x}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

14. 【答案】(1) ①  $(-2, -4)$ ; ②  $(2, 1)$  (只需满足  $a+b=3$  即可); (2)  $k=\pm 1$ .

中公讲师解析：(1) ①当  $a=-1$ ,  $b=-2$ ,  $k=2$  时,

$$\therefore a + \frac{b}{k} = -1 + \frac{-2}{2} = -2, \quad ka+b=2 \times (-1) - 2 = -4.$$

$\therefore$  点  $P(-1, -2)$  的“2 属派生点”  $P'$  的坐标为  $(-2, -4)$ .

故答案为： $(-2, -4)$ .

$$\text{②由题可得: } \begin{cases} a + \frac{b}{k} = 3 \\ ka + b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore ka+b=3k=3.$$

$$\therefore k=1.$$

$$\therefore a+b=3.$$

$$\therefore b=3-a.$$

当  $a=1$  时,  $b=2$ , 此时点  $P$  的坐标为  $(1, 2)$ .

故答案为： $(1, 2)$ .

说明：只要点  $P$  的横坐标与纵坐标的和等于 3 即可.

(2)  $\because$  点  $P$  在  $x$  轴的正半轴上,

$$\therefore b=0, \quad a>0.$$

$\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(a, 0)$ , 点  $P'$  的坐标为  $(a, ka)$ .

$$\therefore PP' \perp OP.$$

$\because \triangle OPP'$  为等腰直角三角形,

$$\therefore OP=PP'.$$

$$\therefore a=\pm ka.$$

$$\therefore a>0,$$

$$\therefore k=\pm 1.$$

故答案为： $\pm 1$ .

15. 【答案】

【原题初探】见解析.

【变式猜想】 $pm=pn$ .

【拓展应用】 $1000\text{m}^2$ .

中公讲师解析:

【原题初探】

$\because AD \parallel BC$ ,

$\therefore \angle ADE = \angle FCE$ ,

在  $\triangle ADE$  与  $\triangle FCE$  中, 
$$\begin{cases} \angle ADE = \angle FCE \\ DE = CE \\ \angle AED = \angle FEC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE$ ,

$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle FCE}$ ,

$\therefore S_{\text{四边形 } ABCD} = S_{\text{四边形 } ABCE} + S_{\triangle ADE} = S_{\text{四边形 } ABCE} + S_{\triangle FCE} = S_{\triangle ABF}$ ;

【变式猜想】

当直线旋转到点  $P$  是  $MN$  的中点时  $S_{\triangle MON}$  最小,

如图 (1), 过点  $P$  的另一条直线  $EF$  交  $OA$ 、 $OB$  于点  $E$ 、 $F$ , 设  $PF < PE$ , 过点  $M$  作  $MG \parallel OB$  交  $EF$  于  $G$ ,

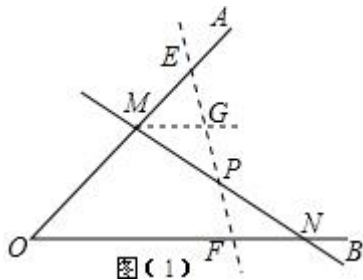


图 (1)

由方法探究可以得出当  $P$  是  $MN$  的中点时  $S_{\text{四边形 } MOFG} = S_{\triangle MON}$ .

$\because S_{\text{四边形 } MOFG} < S_{\triangle EOF}$ ,

$\therefore S_{\triangle MON} < S_{\triangle EOF}$ ,

$\therefore$  当点  $P$  是  $MN$  的中点时  $S_{\triangle MON}$  最小;

【拓展应用】

①如图 3,

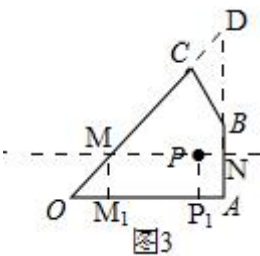


图 3

当过点  $P$  的直线  $l$  与四边形  $OABC$  的一组对边  $OC$ 、 $AB$  分别交于点  $M$ 、 $N$ , 延长  $OC$ 、 $AB$  交

于点 D,

$\because$  OA 边长 60 米, 使用测角器测得  $\angle AOC=45^\circ$ ,  $OA \perp AB$ ,

$\therefore \triangle OAD$  是等腰直角三角形,

$$\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AO^2 = \frac{1}{2} \times 60^2 = 1800,$$

由变式猜想的结论可知, 当  $PN=PM$  时,  $\triangle MND$  的面积最小,

$\therefore$  四边形 ANMO 的面积最大.

作  $PP_1 \perp OA$ ,  $MM_1 \perp OA$ , 垂足分别为  $P_1$ ,  $M_1$ ,

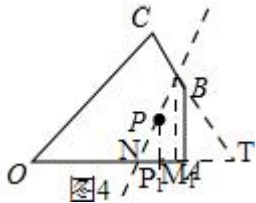
$$\therefore M_1P_1 = P_1A = 20,$$

$$\therefore OM_1 = M_1M = 20,$$

$$\therefore MN \parallel OA,$$

$$\therefore S_{\text{四边形 OANM}} = S_{\triangle OMM_1} + S_{\text{四边形 ANMM}_1} = 12 \times 20 \times 20 + 20 \times 40 = 1000.$$

②如图 4,



当过点 P 的直线 l 与四边形 OABC 的另一组对边 CB、OA 分别交 M、N, 延长 CB 交 x 轴于 T,

过点 C 作  $CH \perp OA$ ,

$$\therefore CH = 45.$$

$$\because \angle COA = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle CHA$  为等腰直角三角形,

$$\therefore OC = 45\sqrt{2},$$

$$\because OC \perp BC,$$

$\therefore \triangle OCT$  是等腰直角三角形,

$$\therefore S_{\triangle OCT} = \frac{1}{2} OC^2 = 2025, \quad OT = 90$$

由问题迁移的结论可知, 当  $PM=PN$  时,  $\triangle MNT$  的面积最小,

$\therefore$  四边形 CMNO 的面积最大.

$$\therefore NP_1 = M_1P_1, \quad MM_1 = 2PP_1 = 40,$$

$$\therefore TM_1 = 40$$

$$\therefore OM_1 = OT - TM_1 = 50.$$

$$\because AT = AB = 30,$$

$$\therefore AM_1 = TM_1 - AT = 40 - 30 = 10,$$

$$\because AP_1 = 20,$$

$$\therefore P_1N=P_1M_1=AP_1=AM_1=20-10=10,$$

$$\therefore NT=P_1N+AP_1+AT=10+20+30=60$$

$$\therefore S_{\triangle MNT}=\frac{1}{2}\times 40\times 60=1200,$$

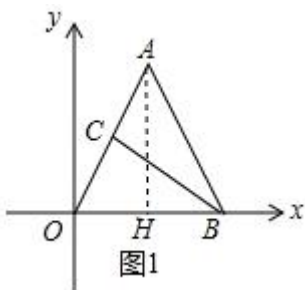
$$\therefore S_{\text{四边形OCMN}}=2025-1200=725<1000.$$

$\therefore$ 综上所述：截得四边形面积的最大值为  $1000\text{ (m}^2\text{)}$ ，

故答案为  $1000\text{m}^2$ 。

16. 【答案】(1) C (1, 2); (2)  $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x$  或  $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$ ; (3) (6, 4) 或 (10,  $-\frac{20}{3}$ ) 或 (-10, 20) 或 (-6, 4) .

中公讲师解析：(1) 如图 1，过点 A 作  $AH\perp OB$  于点 H.



$$\because AO=AB, AH\perp OB,$$

$$\therefore OH=\frac{1}{2}OB=2,$$

$$\because \tan\angle AOB=2,$$

$$\therefore AH=4,$$

$$\therefore \text{点 A 的坐标为 } (2, 4) .$$

$$\because \text{C 是 OA 的中点},$$

$$\therefore \text{点 C 的坐标为 } (1, 2) .$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知: A 的坐标为 } (2, 4) ,$$

$$\because \angle APO=\angle CBO,$$

$$\therefore \tan\angle APO=\tan\angle CBO=\frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{AH}{PH}=\frac{2}{3},$$

$$\therefore PH=6,$$

$$\text{设 P 的坐标为 } (x, 0) ,$$

$$\because H (2, 0) ,$$

$$\therefore PH=|x-2|,$$

$$\therefore |x-2|=6,$$

$\therefore x=8$  或  $x=-4$ ,

$\therefore P(8, 0)$  或  $(-4, 0)$ ;

当  $P$  的坐标为  $(8, 0)$  时,

把  $A(2, 4)$  和  $(8, 0)$  代入  $y=ax^2+bx$ ,

$$\therefore \begin{cases} 4=4a+b \\ 0=64a+8b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{8}{3} \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为:  $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x$ ,

当  $P$  的坐标为  $(-4, 0)$  时,

把  $A(2, 4)$  和  $P(-4, 0)$  代入  $y=ax^2+bx$ ,

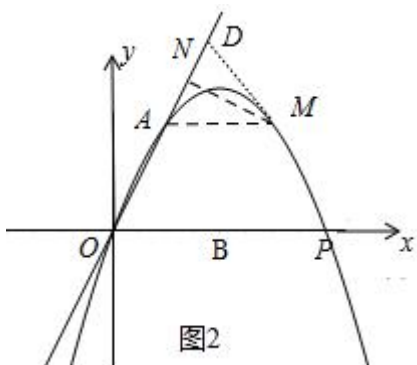
$$\therefore \begin{cases} 4=4a+2b \\ 0=16a-4b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{4}{3} \end{cases},$$

$\therefore$  抛物线的解析式为:  $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$ ,

综上所述, 抛物线的解析式为:  $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x$  或  $y=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x$ ;

(3) 当抛物线的解析式为  $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x$  时, 如图 2,



当  $\triangle MAD \sim \triangle AOB$  时,

$\because \triangle AOB$  是等腰三角形,

$\therefore \angle MAD = \angle AOB$ ,

若点  $N$  在  $A$  的上方时,

此时  $\angle MAN = \angle AOB$ ,

$\therefore M$  的纵坐标为 4,

解得:  $x=2$  (舍去) 或  $x=6$ ,

$\therefore M$  的坐标为  $(6, 4)$  ,

过点 A 作  $AE \perp DM$  于点 E, 交于 x 轴于点 F, 设  $D(a, 2a)$ ,

$$\because \tan \angle MDA = \tan \angle AOB = 2,$$

∴由勾股定理可知:  $AD = \sqrt{5} (2-a)$ ,

$$\therefore DM = \frac{5(2-a)}{2}, \text{ 设 } M \text{ 的横坐标为 } x,$$

$$\therefore x = \frac{10 - 3a}{2},$$

把 M ( $\frac{10-3a}{2}$ , 2a) 代入  $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x$ ,

解得:  $a=2$  或  $a=-\frac{10}{3}$ ,

∴当  $a=2$  时,  $M(2, 4)$  舍去,



$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{4}{3}, \\ b = \frac{20}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 MA 的解析式为: } y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{解得: } x=2 \text{ (舍去) 或 } x=-10,$$

$$\text{把 } x=-10 \text{ 代入 } y = -\frac{4}{3}x + \frac{20}{3},$$

$$\therefore y=20,$$

$$\therefore M(-10, 20),$$

若点 N 在点 A 的下方时,

此时  $\angle MAN = \angle AOB$ ,

$$\therefore AM \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore M \text{ 的纵坐标为 } 4,$$

$$\text{把 } y=4 \text{ 代入 } y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x,$$

$$\therefore x=-6 \text{ 或 } x=2 \text{ (舍去)},$$

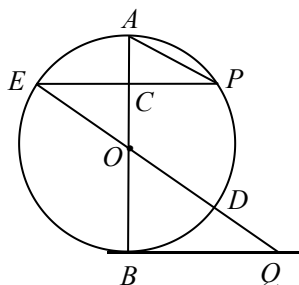
$$\therefore M(-6, 4),$$

综上所述, 存在这样的点 M (6, 4) 或  $(10, -\frac{20}{3})$  或  $(-10, 20)$  或  $(-6, 4)$ , 使得

$$\triangle MAD \sim \triangle AOB.$$

17. 【答案】(1)  $\angle APC = 30^\circ$ ; (2)  $k$  值不随点  $P$  的移动而变化.

中公讲师解析: (1) 解法一: 当点  $E$  在  $\odot O$  上时, 设  $OQ$  与  $\odot O$  交于点  $D$ ,



$$\because AB \perp PC, \therefore \widehat{AE} = \widehat{AP}.$$



$\therefore AP \parallel OQ, \therefore \angle APE = \angle PEQ.$

$\therefore \widehat{AP} = \widehat{PD}.$

又  $\angle AOE = \angle BOD, \widehat{AE} = \widehat{BD}$ , 即  $\widehat{AE} = \frac{1}{3} \widehat{APB}$ ,

$\therefore \angle APE = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \angle AOB = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 180^\circ = 30^\circ.$

解法二: 设点  $E$  在  $\odot O$  上时, 由已知有  $EC = CP$ ,

$\therefore \triangle EOC \cong \triangle PAC.$

$\therefore OC = CA, OE = AP.$

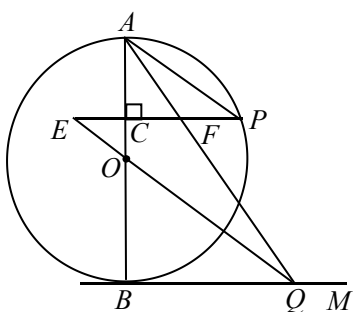
在  $Rt \triangle APC$  中,  $\sin \angle APC = \frac{AC}{AP} = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2},$

$\therefore \angle APC = 30^\circ.$

(2)  $k$  值不随点  $P$  的移动而变化. 理由是:

$\because P$  是  $\odot O$  右半圆上的任意一点, 且  $AP \parallel OQ, \therefore \angle PAC = \angle QOB.$

$\because BM$  是  $\odot O$  的切线,  $\therefore \angle ABQ = Rt\angle,$



又  $\because PC \perp AB, \therefore \angle ACP = Rt\angle,$

$\therefore \angle ACP = \angle ABQ.$

$\therefore \triangle ACP \sim \triangle OBQ.$

$\therefore \frac{AC}{OB} = \frac{PC}{QB}.$

又  $\because \angle CAF = \angle BAQ, \angle ACF = \angle ABQ = Rt\angle,$

$\therefore \triangle ACF \sim \triangle ABQ.$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{CF}{BQ}.$$

$$\text{又} \because AB = 2OB, \therefore \frac{AC}{2OB} = \frac{CF}{BQ} \text{ 即 } \frac{AC}{OB} = \frac{2CF}{BQ}.$$

$$\therefore PC = 2CF \text{ 即 } PF = CF.$$

$$\therefore k = \frac{PF}{PC} = \frac{1}{2}, \text{ 即 } k \text{ 值不随点 } P \text{ 的移动而变化.}$$